國立中央大學八十八學年度轉學生入學試題卷

理,工,地科,資電學院 二年級　　科目：微積分　　共 1 頁 第 1 頁

I. 填空題：每題 5 分, 請將答案按題號寫在答案卷上, 不要寫在試題卷上

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^x =$ ______
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)=$ ______
3. 令 $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x-4}$, 則 $f'(1)=$ ______
4. $\tan x$ 在 $x=-\frac{\pi}{4}$ 處的線性化 (linearization) 是 ______
5. 曲線 $x^3+3xy^3+xy^2=xy$ 在點 $(1,-1)$ 的切線方程式為 ______
6. 曲面 $3x^2+2y^2-z-11=0$ 在 $(2,1,3)$ 處的切平面方程式為 ______
7. 令 $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$, 給定 $\vec{A}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$, 則 f 在 $(1,1,0)$ 對 $\vec{A}$ 的方向導數為 ______
8. 令 $\vec{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\vec{i}+(\sin t-t\cos t)\vec{j}$, $\frac{\pi}{2}\le t\le\pi$, 則此段曲線之弧長為 ______
9. 由曲線 $y=2\sqrt{x}$, $1\le x\le 2$ 繞著 x 軸旋轉生成的曲面面積為 ______
10. 若 $a>0$, 則無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}\right)^{n^2}x^n$ 的收斂半徑為 ______
11. $\tan^{-1}x$ 的 Maclaurin 級數展開為 ______
12. 令 $w=\sin(4x+5y)$, $x=u+v$, $y=u-v$, 則 $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=$ ______

II. 綜合題：每題 10 分, 演算與証明部分須詳細說明.

1. (a) 敘述均值定理 (The Mean Value Theorem)
   (b) 證明：對任意實數 x,y, $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$.
2. (a) 敘述微積分基本定理 (The Fundamental Theorem of Calculus)
   (b) 若 $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\cos\pi x$, 對於任意正實數恆成立, 求 $f(4)$.
3. 求 $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{2}}}$
4. 求 $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\,dy\,dx$

奈